Université Paul Sabatier Année 2017-2018
Algèbre $1^{\text{ère}}$ année

Contrôle continu n°1

Mercedi 14 mars 2018
Durée 2h

L'utilisation des calculatrices, téléphones, tablettes ou ordinateurs est interdite. Le simple fait d'avoir un de ces objets à vos côtés est assimilé à une tentative de fraude.

Il existe souvent un lien entre les questions mais la plupart peuvent être traitées indépendamment. Ne restez pas bloqué sur une question.

Partie I :

1. On pose $v_1 = (1,1,2), v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (-1,3,2)$. Soit $P = vect(v_1, v_2)$ le plan engendré par les vecteurs v_1 et v_2.
   (a) Ces trois vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? Dans la négative, exprimer une relation liant ces vecteurs.

Solution :(*1pt*)
On remarque que $v_3 = v_1 - 2v_2$ donc les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.

   (b) Le vecteur v_3 appartient-il au plan P ?

Solution :(*1pt*)
$v_3 = v_1 - 2v_2$ donc v_3 appartient au plan $P = \{\lambda v_1 + \mu v_2; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

   (c) Donner une équation cartésienne de P.

Solution :(*1pt*)

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in P &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x,y,z) = \lambda v_1 + \mu v_2 \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2\lambda \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - z/2 = \mu \\ y - z/2 = -\mu \\ \frac{z}{2} = \lambda \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z/2 = \lambda - \mu \\ \frac{z}{2} = \lambda \end{cases}
\end{aligned}$$

donc une équation de P est $x + y - z = 0$.

---

2. Soit $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \right\}$.

   (a) Montrer que D est une droite dont on donnera un vecteur directeur.

SOLUTION :(*1pt*)

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = -2y - z = z \\ y = -z \end{cases} \right\} \\ &= \{(z, -z, z); z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1, -1, 1); y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

donc D est la droite vectorielle de vecteur directeur $(1, -1, 1)$.

   (b) La droite D est-elle incluse dans le plan P ?

SOLUTION :(*1pt*)
Le vecteur directeur de D trouvé à la question précédente ne vérifie pas l'équation du plan P donc $D \not\subset P$.

   (c) Donner des équations d'une droite incluse dans le plan P.

SOLUTION :(*1pt*)
$x + y - z = 0$ est une équation de P donc $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ sont des équations d'une droite incluse dans P.

Partie II :

Soit m un paramètre. On considère le système

$$(S) \begin{cases} x + y - z = m - 1 \\ (1 - m)x - y + 3z = (m - 2)(1 - m) \\ 2x + my + 2z = 3m - 2 \end{cases} .$$

1. Résoudre le système. On discutera en fonction de la valeur du paramètre m.

SOLUTION :(*5pt*)

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-z=m-1 & \\ (m-2)y+(4-m)z=m-1 & L_2-(1-m)L_1 \\ (m-2)y+4z=m & L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-z=m-1 & \\ (m-2)y+(4-m)z=m-1 & \qquad (1pt) \\ mz=1 & L_3-L_2 \end{cases}$$

Si $m=0$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=-1 \\ -2y+4z=-1 \\ 0=1 \end{cases}$ donc $\mathcal{S}=\emptyset$ (*1pt*).

Si $m \neq 0$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=m-1 \\ (m-2)y=m-1-(4-m)\frac{1}{m}=\frac{m^2-4}{m} \\ z=\frac{1}{m} \end{cases}$

Si $m=2$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ 0=0 \\ z=\frac{1}{m} \end{cases}$ donc $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{1+m}{m}-y, y, \frac{1}{m}\right)\right\}$ (*1.5pt*).

Si $m \neq 0$, $m \neq 2$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=m-1-y+z=m-2-\frac{3}{m} \\ y=\frac{m+2}{m} \\ z=\frac{1}{m} \end{cases}$

donc $\mathcal{S}=\left\{\left(m-2-\frac{3}{m}, 1+\frac{2}{m}, \frac{1}{m}\right)\right\}$ (*1.5pt*).

2. Pouvait-on prévoir le résultat obtenu pour $m=0$? On pourra utiliser les résultats de la partie I.

SOLUTION :(*1pt*)

Dans le cas où $m=0$, le système peut s'écrire $x.v_1+y.v_2+z.v_3=(1,-2,-2)$ or $(1,-2,-2)$ n'appartient pas à P (ses coordonnées ne vérifient pas l'équation cartésienne trouvée précédemment) donc il ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs qui engendrent P.

Partie III :

On considère la matrice $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $w_1=(1,-1,1)$, $w_2=(1,1,0)$ et $w_3=(0,1,1)$.

1. Montrer que les vecteurs w_2 et w_3 sont orthogonaux au vecteur w_1.

SOLUTION :(*1pt*)

$w_1.w_2=1.1+-1.1+1.0=0$ et $w_1.w_3=1.0+-1.1+1.1=0$.

2. On définit l'application $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{3}(x-y+z, -x+y-z, x-y+z)$.

   (a) Calculer $f(w_1)$, $f(w_2)$ et $f(w_3)$.

SOLUTION :(*1pt*)

$f(w_1) = w_1$, $f(w_2) = 0$ et $f(w_3) = 0$.

   (b) Montrer que f est la projection orthogonale sur la droite D définie précédemment.

SOLUTION :(*1.5pt*)

Les coordonnées de $f(x,y,z)$ vérifie les équations de D donc $f(x,y,z)$ appartient à D.
On vérifie également que $\left((x,y,z) - \frac{1}{3}(x-y+z, -x+y-z, x-y+z)\right).(1,-1,1) = 0$.
f est donc bien la projection orthogonale sur D.

---

3. Calculer A^2. La matrice A est-elle inversible ?

SOLUTION :(*1.5pt*)

$A^2 = A$ donc A n'est pas inversible. Si A était inversible, on aurait (en multipliant l'égalité par A^-1) $A = I_3$.

---

4. On pose $B = I_3 - 2A$. Calculer B^2. La matrice B est-elle inversible ?

SOLUTION :(*1.5pt*)

B et I commutent donc on peut utiliser la formule du binôme. $B^2 = I_3^2 - 4A + 4A^2 = I_3$ donc B est inversible d'inverse B.

---

5. Calculer $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

SOLUTION :(*1pt*)

$A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x - y + z \\ -x + y - z \\ x - y + z \end{pmatrix}$. On reconnait $f(x,y,z)$.

---

6. (hors barème) Que pouvez-vous déduire sur f de la valeur de A^2 ?

SOLUTION :(*1pt*)

La relation $A^2 = A$ se traduit en $f^2 = f$ ce qui est le cas de toute projection.
